UTN.BA

# ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen final 19/05/2026

**Apellido y nombre:**

**Corrigió:** **Revisó:**

| T1 | T2 | P1 | P2 | P3 | P4 | Calificación |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

**Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.**
**No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas.**
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).
**Su examen se mostrará una vez corregido.**

T1. a) Enuncie el teorema de Green.

b) Calcule la circulación de un campo $\vec{f}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{f}=(P,Q)\in C^1$ a lo largo de la semicircunferencia $x^2+y^2=4$, $y\geq 0$, orientada de $(2,0)$ a $(-2,0)$, sabiendo que $Q'_x - P'_y = 3$ y que $\vec{f}(x,0)=(x^2,\ 6x)$.

T2. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. **Justifique su respuesta.**

a) El plano tangente a la superficie $S: x^3z+xy-xz^2=-3$ en $(1,-1,2)$ y la recta tangente a la curva $C:(x,y,z)=(t^2,\ 2t+1,\ 2t^2)$ en el mismo punto son perpendiculares.

b) La familia $xy=k$ es ortogonal a la familia $x^2+y^2=R^2$.

P1. Sea $\vec{g}(x,y,z)=\left(yz+\operatorname{sen}(x^2),\ 2xz^2+\cos(y^2),\ \operatorname{sen}(z^2)\right)$. Calcule la circulación de $\vec{g}$ a lo largo de la curva intersección de las superficies definidas por $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y $z=6-x^2-y^2$. Indique claramente la orientación elegida para el cálculo.

P2. Calcule la integral $\iint_S y\,d\sigma$ donde $S$ es la porción de la superficie $z=\sqrt{x^2+y^2}$ que verifica la condición $x^2+(y-2)^2\leq 4$.

P3. Calcule el flujo de $\vec{f}(x,y,z)=\left(y^2+z^2,\ x^2+z^2,\ z^2\right)$, a través de la superficie frontera del sólido $V$ definido por $x^2+y^2+z^2\leq 9$, $x\geq 0$, $z\geq 0$. Indique claramente la orientación de la superficie elegida para el cálculo.

P4. Halle y clasifique los extremos relativos y absolutos de la función $f(x,y)=y$ en el conjunto $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 4\}$.

Resuelto por Sylvina

| AM2 | Final | HOJA N° 1/3 FECHA 19-5-26 |
|---|---|---|

T1 a) Enunciar el teorema de Green

Sean: $D$ un recinto compacto

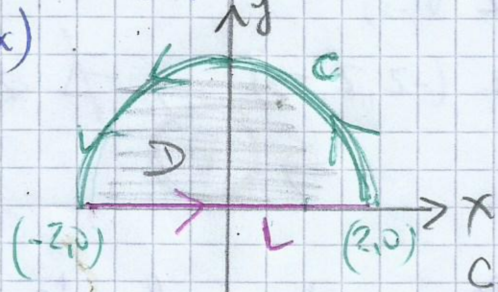
$C$ curva frontera de $D$, curva suave a trozos y cerrada, orientada positivamente

$\bar{F} = (P, Q)$, $\bar{F} \in C^1$

$$\Rightarrow \oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dx\, dy$$

b) Calcular la circulación de un campo $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\bar{f} = (P, Q)$ $\in C^1$ a lo largo de la semicircunferencia $x^2+y^2=4$, $y \geq 0$ orientada de $(2,0)$ a $(-2,0)$, sabiendo que $Q'_x - P'_y = 3$ y que $\bar{f}(x,0) = (x^2, 6x)$

$$C: \begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$




C es curva abierta

L es un segmento que va de $(-2,0)$ a $(2,0)$

$C_F = C \cup L \to$ curva frontera

$$\oint_{C_F^+} \bar{f}\, d\bar{l} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dx\, dy = \iint_D 3\, dx dy = 3 \boxed{\iint_D dx dy}$$

$\underbrace{D \text{ región compacta con frontera } C_F^+}_{\text{T. Green pues } \bar{f} \in C^1}$

área de $D = \dfrac{\pi \cdot 3^2}{2}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\oint_{C_F^+} \bar{f}\, d\bar{l} = \dfrac{27}{2}\pi}$

$$C_F = C \cup L \Rightarrow \underbrace{\oint_{C_F^+} \bar{f}\, d\bar{l}}_{\frac{27}{2}\pi} = \int_C \bar{f}\, d\bar{l} + \underbrace{\int_L \bar{f}\, d\bar{l}}_{16/3} \quad (*)$$

$L: \bar{\beta}(t) = (t, 0) \quad t \in [-2, 2]$

$\bar{\beta}'(t) = (1, 0)$

$$\int_L \bar{f}\, d\bar{l} = \int_{-2}^{2} \bar{f}_{(t,0)} \cdot \bar{\beta}'(t)\, dt =$$

$$= \int_{-2}^{2} (t^2, 6t)(1,0)\, dt = \int_{-2}^{2} t^2\, dt = \boxed{\frac{16}{3} = \int_L \bar{f}\, d\bar{l}}$$

$(*)$ $\boxed{\int_C \bar{f}\, d\bar{l} = \frac{27}{2}\pi - \frac{16}{3}}$

NOTA

T2 V o F

a) El plano tangente a la sup. $S: x^3z + xy - xz^2 = -3$ en $(1,-1,2)$ y la recta tangente a $C: (x,y,z) = (t^2, 2t+1, 2t^2)$ en el mismo punto son perpendiculares

$$C: \bar{\gamma}_{(t)} = (t^2, 2t+1, 2t^2)$$

Si el plano tang a S en $(1,-1,2)$ es $\perp$ a C $\Rightarrow N_S \parallel \gamma'_{(t)}$

$$N_S = (\underbrace{3x^2z + y - z^2}_{6 \; +(-1) \; -4}, \underbrace{x}_{1}, \underbrace{x^3 - 2xz}_{1 - 2\times 2}) \Rightarrow \boxed{N_{S(1,-1,2)} = (1, 1, -3)}$$

$$(1,-1,2) = (t_0^2, 2t_0+1, 2t_0^2) \Rightarrow \boxed{t_0 = -1}$$

$$\bar{\gamma}'_{(t)} = (2t, 2, 4t) \Rightarrow \boxed{\bar{\gamma}'_{(-1)} = (-2, 2, -4)}$$

$$N_{S(1,-1,2)} \overset{?}{=} k\, \bar{\gamma}'_{(-1)}$$

$$(1,1,-3) \overset{?}{=} k\,(-2,2,-4) \rightarrow \nexists\ k \text{ que cumple}$$

$\Rightarrow$ F

b) La familia $xy = k$ es ortogonal a la familia $x^2+y^2 = R^2$

y es función $\rightarrow y + xy' = 0 \rightarrow xy' = -y \rightarrow y' = -\frac{y}{x}$

$$y'_\perp = \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \rightarrow x\,dx = y\,dy$$

$$\frac{x^2}{2} + c = \frac{y^2}{2} \rightarrow \boxed{x^2 - y^2 = c_2}$$

$$x^2 - y^2 = c_2 \quad \not\!\!\perp \quad x^2 + y^2 = R^2$$

No es $\perp$

F

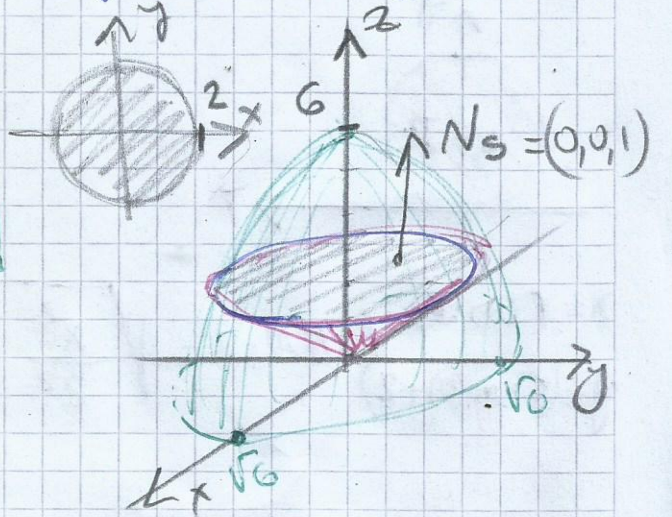
Resuelto por Sylvina

| AM2 | Final | HOJA Nº 2/3 FECHA 19-5-26 |
|---|---|---|

(P1) Sea $\bar{g}(x,y,z) = (yz + sen(x^2), 2xz^2 + cos(y^2), sen(z^2))$

Calcular la circulación de $\bar{g}$ a lo largo de la curva intersección de las sup definidas por $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $z = 6 - x^2 - y^2$

Indicar la orientación elegida



$$C: \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \boxed{\text{cono}} \\ z = 6 - (x^2+y^2) \rightarrow \boxed{\text{paraboloide}} \end{cases}$$

Hallo la intersección

$x^2 + y^2 = 6 - z$ , $z \geq 0$

$z = \sqrt{6-z} \Rightarrow z^2 = 6 - z$

$z^2 + z - 6 = 0 \rightarrow \boxed{z = 2}$ y $\cancel{z = -3}$

curva plana $\boxed{C: \begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}}$

$S : z = 2$

Circulación $\mathbb{R}^3$

curva cerrada contenida en un plano (orientada)

$\bar{F} \in C^1$ (componentes func. elementales)

$\Rightarrow$ T. Stokes $\Rightarrow \oint_{C+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_S rot.\bar{F}\, d\bar{s} = \iint_{S_{xy}} rot.\bar{F}\, N dxdy$

$rot(\bar{F}) = (R'y - Q'z, P'z - R'x, Q'x - P'y) =$

$= (0 - 4xz, y - 0, 2z^2 - z) = (-4xz, y, 2z^2 - z)$

$\oint_{C+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_{S_{xy}} (-4xz, y, 2z^2 - z)(0,0,1)\, dxdy = \underbrace{\iint_{S_{xy}} 2z^2 - z\, dxdy}_{\text{en } z=2} =$

$= \iint_{S_{xy}} 8 - 2\, dxdy = 6 \underbrace{\boxed{\iint_{S_{xy}} dxdy}}^{\text{Area } S_{xy}} = 6 . \pi . 2^2$

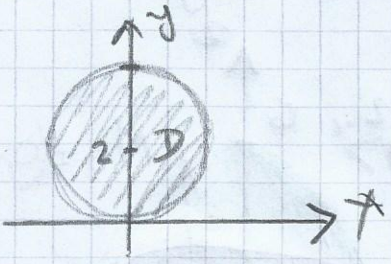
$$\boxed{\oint_{C+} \bar{F}\, d\bar{l} = 24\pi}$$

NOTA

Resuelto por Sylvina

(P2) Calcular la integral $\iint_S y\, d\sigma$ donde $S$ es la porción de la sup. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ que verifica la condición $x^2+(y-2)^2 \leq 4$

$$S: \begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{z\geq 0} \underbrace{z^2=x^2+y^2}_{\underbrace{x^2+y^2-z^2=0}} \\ x^2+(y-2)^2 \leq 4 \end{cases}$$



$$N_S=\left(\frac{2x}{2z},\frac{2y}{2z},\frac{-2z}{2z}\right)$$

$$N_S=\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},-1\right)$$

$x=r\cos(t)$

$y=(r\,\text{sen}(t)+2)$

$$\|N_S\|=\sqrt{\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}+1}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x^2+y^2+x^2+y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$$

$$\boxed{\|N_S\|=\sqrt{2}}$$

$$\iint_S y\,ds=\iint_{S_{xy}} y\cdot\|N_S\|\,dx\,dy=\iint_{S_{xy}} y\sqrt{2}\,dx\,dy=$$

$$\overset{\text{C.V.}}{=}\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \underset{\uparrow \text{Jac.}}{r}\,(r\,\text{sen}(t)+2)\,dr\,dt=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\,\text{sen}(t)+2r\,dr\,dt=$$

$$=\sqrt{2}\left[\int_0^{2\pi}\underbrace{\frac{8}{3}\,\text{sen}(t)}_{0}+4\,dt\right]=\sqrt{2}\cdot 4\cdot 2\pi$$

$$\boxed{\iint_S y\,ds=8\sqrt{2}\,\pi}$$

NOTA

Resuelto por Sylvina

| AM2 | Final | HOJA N° 3/3 <br> FECHA 19/8/26 |
|---|---|---|

(P3) Calcular el flujo de $\bar{f}(x,y,z) = (y^2+z^2, x^2+z^2, z^2)$ a través de la sup. frontera del sólido V definido por $x^2+y^2+z^2 \leq 9$, $x \geq 0$, $z \geq 0$. Indicar la orientación elegida

Sup. FRONTERA $\Rightarrow$ Gauss directo

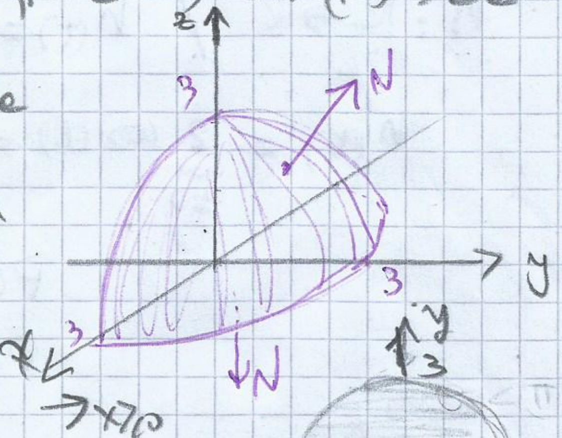
$\bar{f} \in C^1$ (polinomios) ✓

Sup. cerrada, frontera de V (región de $\mathbb{R}^3$)
↳ orientada al exterior

$$\Rightarrow \quad \oiint_S \bar{f}\, d\bar{\sigma} = \iiint_V \operatorname{div} \bar{f}\, d\text{vol}$$

$$\operatorname{div}(\bar{f}) = P'_x + Q'_y + R'_z = 0 + 0 + 2z \rightarrow \operatorname{div}(\bar{f}) = 2z$$

$$V: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 9 \rightarrow \text{esfera centrada en } \bar{0}\ r=3 \\ x \geq 0,\ z \geq 0 \end{cases}$$




$$\oiint_S \bar{f}\, d\bar{\sigma} = \iiint_V 2z\, dx\,dy\,dz =$$

$$\overset{CV}{=} \int_0^{\pi} \int_0^{3} \int_0^{\sqrt{9-r^2}} \underset{\text{Jac}}{r}\ 2z\ dz\, dr\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{3} r \cdot z^2 \Big|_0^{\sqrt{9-r^2}} dr\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi} dt \int_0^{3} r\,(9-r^2)\, dr = \pi \cdot \frac{81}{4}$$


$0 \leq r \leq 3$

$0 \leq t \leq \pi$

$0 \leq z \leq \sqrt{9-\underbrace{x^2-y^2}_{}}$ $\quad 9-r^2$

$$\boxed{\oiint_S \bar{f}\, d\bar{\sigma} = \frac{81}{4}\pi}$$

NOTA

Resuelto por Sylvina

P4) Hallar y clasificar los extremos relativos y absolutos de la función $f(x,y) = y$ en el conj. $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\}$

Forma mecánica:

Busco PC en el interior ($\underbrace{\text{como extremos libres}}_{\text{hallo } (x,y) \,/\, \nabla f(x,y) = (0,0)}$)

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 1 \end{cases} \Rightarrow \nabla f(x,y) \neq (0,0) \;\; \forall \;\; x^2+y^2 < 4$$

Hallo PC en el borde: $C : x^2+y^2 = 4$

$$\bar{\gamma}(t) : \begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\,\mathrm{sen}(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; h(t) = f(\bar{\gamma}(t)) = 2\,\mathrm{sen}(t)$$

$$h'(t) = \underbrace{2}_{\neq 0} \cos(t) = 0 \to \cos(t) = 0 \to t = \pi/2$$
$$t = \tfrac{3}{2}\pi$$

$$PC_1 = \bar{\gamma}(\pi/2) = (0, 2)$$
$$PC_2 = \bar{\gamma}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = (0, -2)$$

D es un conj. compacto $\Rightarrow$ teorema de Weierstrass (o del compacto)

$$f(PC_1) = f(0,2) = 2 \to \text{máximo}$$

$$f(PC_2) = f(0,-2) = -2 \to \text{mínimo}$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f | alcanza | máximo | relativo | y | absoluto | en $(0,2)$ | y vale 2 |
| f | " | mínimo | " | y | " | en $(0,-2)$ | y vale $-2$ |

Verificación gráfica:

$f(x,y) = y \Rightarrow z = y$